

• -1 pour toute réponse non logique ou sans justification.

Exercice 1

Etudier l'existence et la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

a) $\frac{y^3}{x}$

b) $\frac{yx}{x-y}$

c) $\frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$

Exercice 2

Soit f une fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}^2 .
2. Trouver les dérivées partielles de f au point (x, y) avec $y \neq 0$ et au point $(x, 0)$.
3. Etudier la différentiabilité de f au point (x, y) avec $y \neq 0$ et au point $(x, 0)$.
4. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en tout point (x, y) avec $y \neq 0$ et au point $(0, 0)$.
5. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue au point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$ (Construire une suite $(x_n, y_n)_n$ qui converge vers $(x_0, 0)$ mais $f(x_n, y_n)$ ne converge pas vers $f(x_0, 0) = 0$).

Exercice 3

Identifier les extremums et les points d'inflexion, s'ils existent, de la fonction $f(x, y) = \ln(2y(x-1) + 1)$

Exercice 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x \sin(y) + y \cos(x) + x + y$$

1. Montrer que f définit une fonction implicite φ de classe C^2 au voisinage de $(0, 0)$.
2. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
3. Déterminer un développement limité de φ au voisinage de zéro à l'ordre 2.

Exercice 1

a/ Pour $y = x$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Pour $y = \sqrt[3]{x}$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

la limite n'existe pas car elle dépend du chemin suivi

b/ Pour $y = x$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{yx}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{0} = \infty$

Pour $y = 2x$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{-x} = 0$

donc la limite n'existe pas

c/ On a $(|x|+|y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 \Rightarrow |x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{|x|+|y|} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

or $\lim_{(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ donc $\lim_{(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$

Exercice $f(x,y) = y^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ $y \neq 0$; $f(x,y) = 0$; si $y = 0$

1/ Continuité sur $D = \{(a,b) ; b \neq 0\}$
 Les fonctions $(x,y) \xrightarrow{f_1} \frac{x}{y}$, $x \xrightarrow{f_2} \cos x$; $(x,y) \xrightarrow{f_3} y^2$ sont continues respectivement sur D, \mathbb{R}, D alors $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ est continue sur D

* Continuité en $(a,0)$; $a \in \mathbb{R}$
 $\forall y \neq 0$ $|f(x,y)| = |y^2 \cos \frac{x}{y}| = y^2 |\cos \frac{x}{y}| \leq y^2$ ($|\cos x| \leq 1$)
 On a $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} y^2 = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x,y) = 0 = f(a,0)$ donc f est continue en $(a,0)$
 par conséquent f est continue sur \mathbb{R}^2

2/ i/ Les fonctions $x \rightarrow f(x,y)$ et $y \rightarrow f(x,y)$ sont dérivables sur D car la fonction $x \mapsto y^2$, $y \mapsto \frac{x}{y}$, $x \mapsto \frac{x}{y}$, $y \mapsto y^2$, sont dérivables sur D et $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur \mathbb{R} donc f admet des dérivées partielles au points (a,b) avec $b \neq 0$
 et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y \sin \frac{x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cos \frac{x}{y} - x \sin \frac{x}{y}$
 donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -b \sin \frac{a}{b}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2b \cos \frac{a}{b} - a \sin \frac{a}{b}$

$$\text{ii/ } \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a,0) - f(0,0)}{a-0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0-0}{a} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(a,y) - f(a,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \cos \frac{a}{y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \cos \frac{a}{y} = 0 \quad \text{car } |y \cos \frac{a}{y}| \leq |y| \text{ et } \lim_{y \rightarrow 0} |y| = 0$$

donc f admet des dérivées partielles au point $(a,0)$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0 \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 0$$

3/ i/ Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D , car elles sont la somme, produit et la composée de fonctions continues sur D , à savoir : $(x,y) \rightarrow y$, $(x,y) \rightarrow \sin \frac{x}{y}$, $(x,y) \rightarrow \cos \frac{x}{y}$. donc f est différentiable sur D

ii/ Différentiabilité en $(a,0)$

Si f est différentiable en $(a,0)$ alors $df_{(a,0)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,0) \cdot y = 0x + 0y = 0$

$$\text{De plus } |E(x,y)| = \left| \frac{f(x,y) - f(a,0) - df_{(a,0)}(x,y)}{\|(x-a, y-0)\|} \right| = \left| \frac{y^2 \cos \frac{x}{y}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right| \leq \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

$$\text{On pose } \begin{cases} x-a = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ alors } \left| \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r} \right| = |r \sin^2 \theta| \leq r$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} E(x,y) = 0 \text{ donc } f \text{ est diff. en } (a,0)$$

4/ i/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est la somme, produit et la composée de fonctions continues sur D, à savoir
 $(x,y) \rightarrow x$, $(x,y) \rightarrow y$, $(x,y) \rightarrow \sin \frac{x}{y}$, $(x,y) \rightarrow \cos \frac{x}{y}$

ii/ Continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$

$$\text{On a } \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \left| 2y \cos \frac{x}{y} - x \sin \frac{x}{y} \right| \leq |2y \cos \frac{x}{y}| + |x \sin \frac{x}{y}| \leq 2|y| + |x|$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (2|y| + |x|) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est cont en } (0,0)$$

5/ Montrons $\frac{\partial f}{\partial y}$ est non continue en $(a,0)$; $a \neq 0$

$$\bullet \text{ On a } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} 2y \cos \frac{x}{y} = 0 \text{ car } |2y \cos \frac{x}{y}| = |2y| |\cos \frac{x}{y}| \leq 2|y|, \text{ et } \lim_{(a,0)} 2|y| = 0$$

\bullet Montrons que la fonction $g(x,y) = x \sin \frac{x}{y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$.

Rappel : F admet une limite l en $(a,b) \Leftrightarrow \forall X_n = (x_n, y_n)$ c.v vers (a,b)
 $f(X_n)$ c.v vers l

Considérons la suite $(x_n, y_n) = (a, \frac{a}{\frac{\pi}{2} - n\pi})$ qui converge vers $(a,0)$ alors que

$$g(x_n, y_n) = a \sin\left(\frac{a}{\frac{a}{\frac{\pi}{2} - n\pi}}\right) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ n'a pas de limite}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a pas de limite en $(a,0)$ d'où $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas cont en $(a,0)$
 $a \neq 0$

Exercice 3 $f(x,y) = \ln(2y(x-1)+1) = \ln(2xy-2y+1)$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{2xy-2y+1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x-2}{2xy-2y+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (1,0)$$

$$\bullet r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4y^2}{(2xy-2y+1)^2}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2(2xy-2y+1) - 2y(2x-2)}{(2xy-2y+1)^2} = \frac{2}{(2xy-2y+1)^2}$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-(2x-2)^2}{(2xy-2y+1)^2} \text{ alors } r(1,0) = 0; \quad s(1,0) = 2, \quad t(1,0) = 0$$

$$\text{d'où } D = rt - s^2 = -4 < 0 \Rightarrow f \text{ n'admet pas d'extremums en } (1,0)$$

\bullet Si f admet un point d'inflexion en (x,y) alors $\Delta^2 f = 0$

$$\text{car } \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

Or $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y}$ ne s'annule pas donc f n'admet de point d'inflexion.



ETU UP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..